

欠けた区分図の再現-----逆行現象の発見

『古典力学と天体力学の数学的視点』と題する著書(註1)にピタゴラス三体問題(註2)の正解図が、時間帯で区切り表示されている。すなわち時刻 $T=0 \sim 10, T=40 \sim 50, T=50 \sim 60, T=60 \sim 70$ の運動図が転載されている。欠けている $T=10 \sim 40$ までの図は引用されていない。今回その欠けている部分をPCで計算し補った。

$T=0 \sim 10$

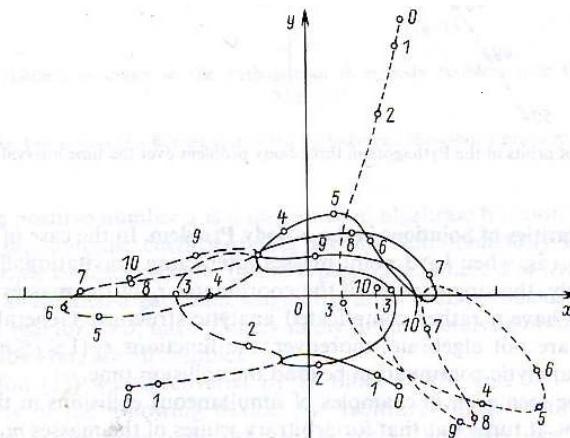
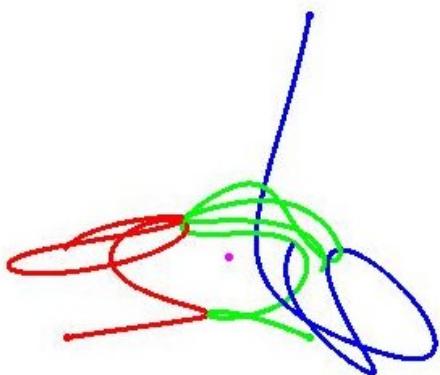
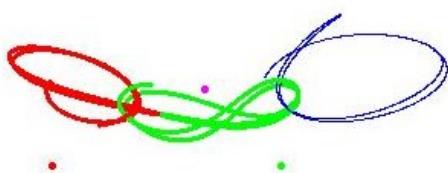
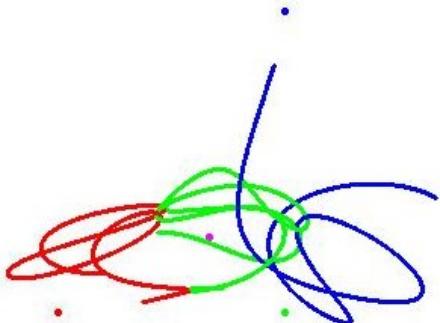


Fig. 12. Motion of the mutually attracting masses in the Pythagorean three-body problem over the time interval $0 \leq t \leq 10$

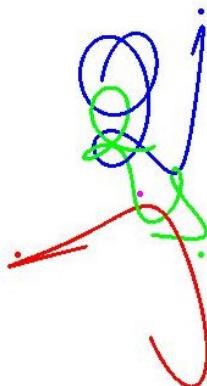
$T=10 \sim 20$



$T=20 \sim 30$

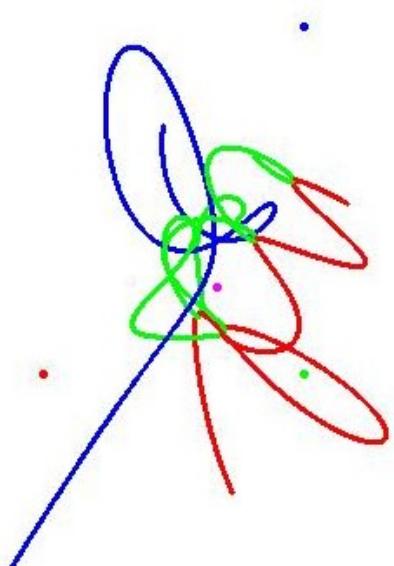


$T=30 \sim 40$

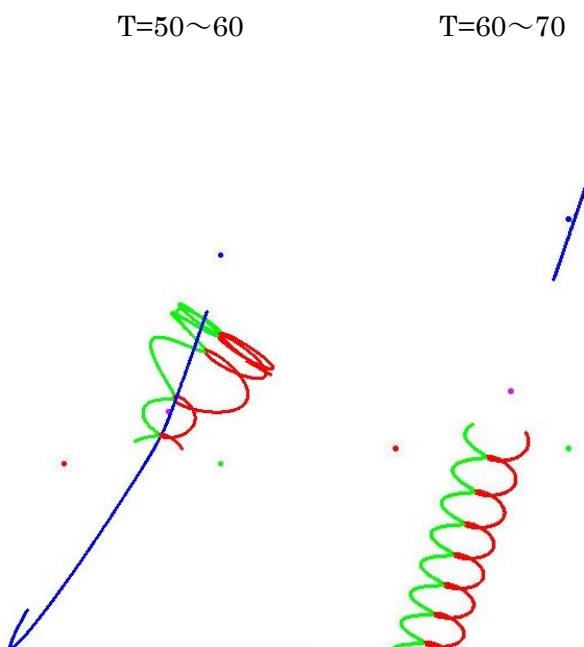


$T=10 \sim 20$ 図を見て頂きたい。軌道が2重になっている。実は3天体が総てスイッチバックしているのである。今来た道を逆もどりしている。それは $T=0 \sim 10$ の運動図と $T=20 \sim 30$ の運動図がよく似ていることからもわかる。運動を再び原点にもどし運動をやり直しているかに見える。あわや周期解かと思われたが、 $T=30 \sim 40$ の運動図でがっかりさせられた。それにしてもこの $T=10 \sim 40$ までの図が欠けているのでこの面白い関係、一時期逆行する運動、が判らなかつた(註3)。

T=40~50



T=50~60



T=60~70

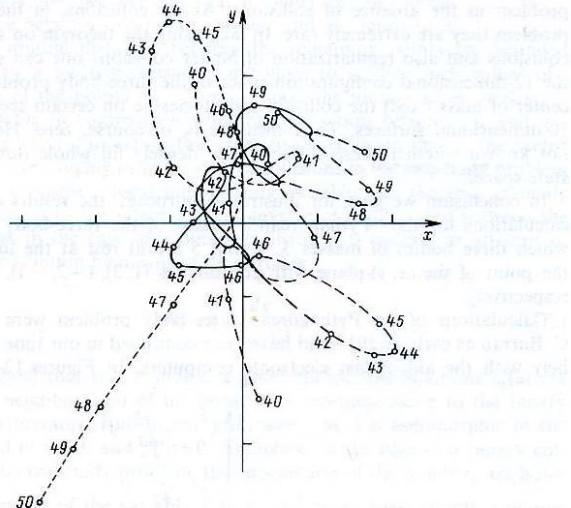


Fig. 13. Aspect of orbits in the Pythagorean three-body problem over the time interval $40 \leq t \leq 50$

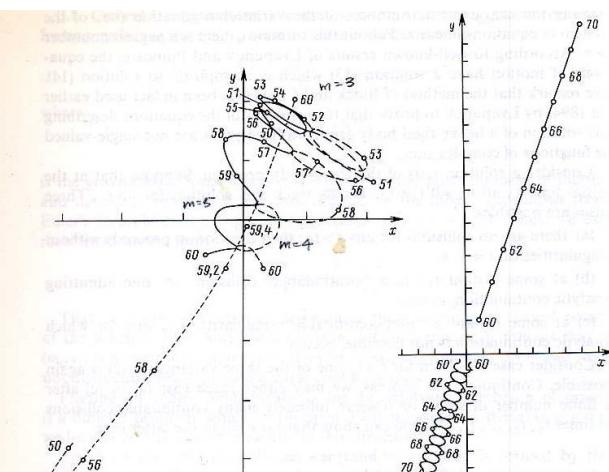


Fig. 14

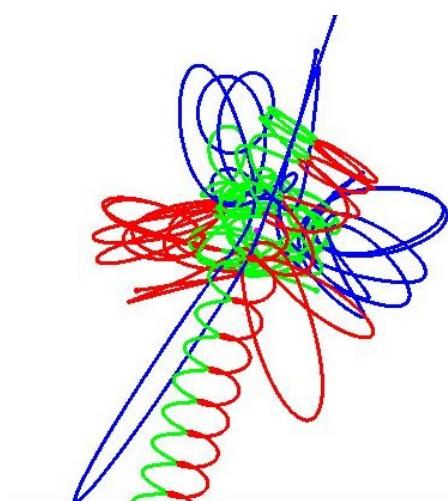
Fig. 15

Fig. 14. Evolution of orbits in the Pythagorean three-body problem over the time interval $50 \leq t \leq 60$

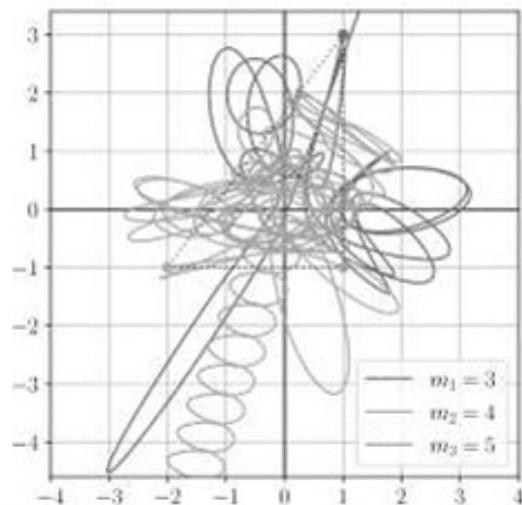
Fig. 15. Formation of a double star in the Pythagorean three-body problem ($60 \leq t \leq 70$)

以下に全体図を掲載しておく。

T=0~70



正解図 インターネット情報



原論文を引用した著者の意図は N 体問題における「衝突」を論じており、3 天体が衝突せず 2 天体が橙円運動、他の 1 天体が直線運動して現場から立ち去る例を挙げることにあった。それで $T=10 \sim 40$ の運動図を省いたのである。だがこの時間帯の運動は三体運動の特徴とも言える運動方向の急変が連続している。

現在ではニュートン力学による天体運動は、一般相対性理論によって扱われている。特にピタゴラス三体問題の場合は、この新しい立場で論じられねばならない微妙な現象である。それでこれは天文学の問題ではなく、数学の問題だとされている所以である。なお一般三体問題の数式解は存在しない。数値解析分野の数値積分算法によって解を求めるしかない。筆者は WindowsXP の基本ソフトで動く BASIC 言語を使い、ニストレム法で軌道計算アルゴリズムをプログラム化した (2025/11/18 井上圭典)。

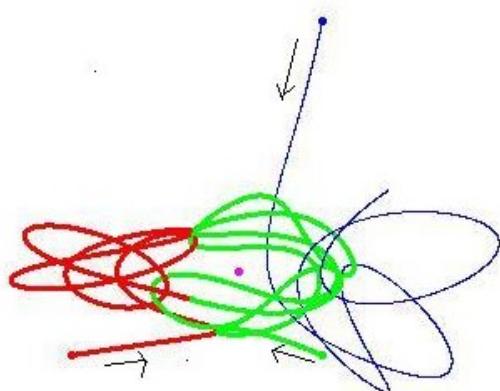
註 1 V.I.Arnold, V.V.Kozlov, A.I.Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, Second Edition, 1989, Springer

ピタゴラス三体問題の引用図は、V.Szebehely and C.F.Peters, 1967, Complete Solution of a General Problem of Three Bodies, A.J. 72, pp.876-883 からのもの。

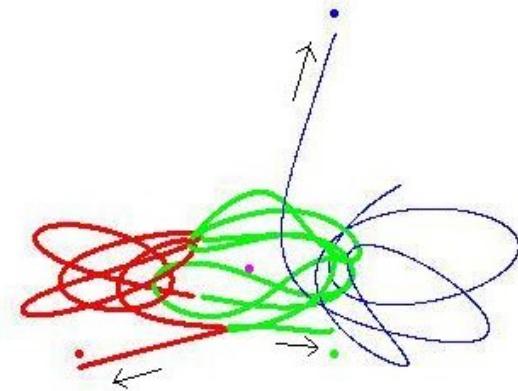
註 2 ピタゴラス三体問題とは三辺の長さが 3,4,5 の直角三角形の各頂点に質量 3,4,5 の天体を配置する。そして静止の状態から万有引力の力が相互間で働く場合、その後の運動はどうなるかを問うたものである。正解図でこの出発点も描かれている。白黒図なので線種で各天体の運動図が区別されている。筆者の運動図は m_1, m_2, m_3 の各天体の動きを青、赤、緑で区別している。原典からの引用運動図は点線、破線、実線で区別している。

註 3 運動図は $T=15.824$ で 3 天体が同時に停止している。この時点前後の運動図は以下のようになる。

$T=0.0 \sim 15.824$



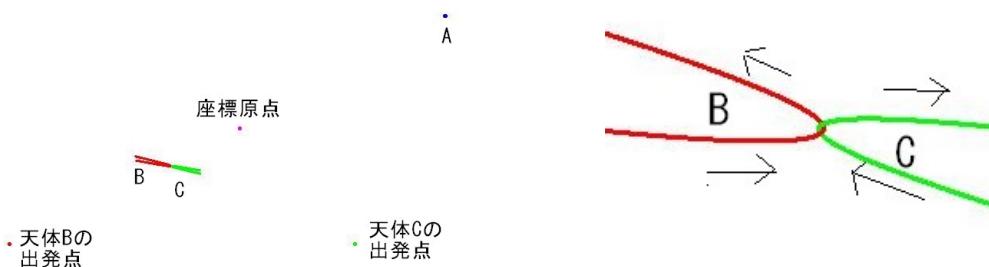
$T=15.824 \sim 31.20$



停止前後の動きは以下の $T=15.764 \sim 15.894$ の図で示した。天体 A は右上隅で停止したまま。天体 B と C とはこの間に運動方向をほぼ逆転させている。図では反撲しあっているようだが、速度の大きさが等しいことがわかり、3 天体の速度がそれぞれ $T=15.824$ を境にほぼ同じであるから $T=15.824 \sim 32.29$ の運動となることが判る。天体 B, C は反撲し合うのではなく下図のように細長い橙円運動 (2 体運動) している。

$T=15.754 \sim 15.894$

$T=15.754 \sim 15.894$ の部分拡大図



$T=15.824 \sim 31.20$ の図で 3 天体位の終点位置が出発位置に近づいている。この問題が提起されたのが 1913 年、コンピューターがない時代に周期解が存在すると予想した研究者がいたという。コンピューター出現後、初期値である各天体の質量、位置、速度を微妙にずらしてシミュレーションし、周期解を得たとの情報もある。これは各天体が同時に原点回帰し、この瞬時速度ゼロとなればあり得る。となれば非常に複雑な永久運動をする。